半順序集合ノ直積ニツイテ（續キ）

横山　金作（阪大）

ラナル平凡ナ因子ヲ表ス。故ニ $\{Z_{i,j} / i=1,\dots\dots,n;\ j=1,\dots\dots,m\}$ ハ全体トシテ $\{X_1,\dots\dots,X_n,*,*,\dots\dots,*\}$ ト一致スル。仝様ニシテ $\{Z_{ij}\}$ ハ全体トシテ $\{Y_1,\dots\dots,Y_m,*,*,\dots\dots,*\}$ ト一致スル。故ニ $\{X_1,\dots\dots,X_n\}$ ト $\{Y_1,\dots\dots,Y_m\}$ トハ全体トシテ一致スル。

（3°）(1)ヲ素因子ノミカラ分解，(2)ヲ平凡ナ因子ヲ含マヌ任意ノ分解トスル。前証ニヨリ $\{Z_{ij}\}$ ハ全体トシテ $\{X_1,\dots\dots,X_n,*,\dots\dots,*\}$ ト一致スル。(4)ニ於テ $Z_{i,j}$ ノ中平凡ナ因子ヲ除クト(4)ハ

$$Y_1 = X_{1,1} \cup \cdots\cdots \cup X_{1,k_1}$$
$$Y_2 = X_{2,1} \cup \qquad \cup X_{2,k_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_m = X_{m,1} \cup \cdots\cdots \cup X_{m,k_m}$$

ナル形ニナリ $\{X_{1,1},\dots\dots,X_{1,k_1};\ X_{2,1},\dots\dots,X_{2,k_2},\dots\dots;\ X_{m,1},\dots\dots,X_{m,k_m}\}$ ハ $\{X_1,\dots\dots,X_n\}$ ト順序ノミヲ異ニスル。

§3. P ガ最小元 0 又最大元 e ヲ有スル場合

(A) P ガ 0 及ビ e ヲ有スルトキ $P = X_1 \textcircled{\cup} \cdots\cdots \textcircled{\cup} X_n$ ナラバ $X_i = P \wedge a_i = \{ x \mid 0 \leqq x \leqq a_i \}$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ ナル n 個ノ元 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ ガ存在シ, P ノ任意ノ元 x ノ X_i 成分ハ $x \wedge a_i$ デアル。即チ, 任意ノ direct join ニヨル分解ハ $P = (P \wedge a_1) \textcircled{\cup} (P \wedge a_2) \textcircled{\cup} \cdots\cdots \textcircled{\cup} (P \wedge a_n)$ ナル形ニ書キ表ハサレ, P ノ任意ノ元 x ニ對シ,

$$x = (x \wedge a_1) \cup (x \wedge a_2) \cup \cdots\cdots \cup (x \wedge a_n)$$

ガ成立スル。

証明, e ノ成分ニヨル表現ヲ

$$e = a_1 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n \qquad a_i \in X_i$$

トスル。P ノ任意ノ元ヲ x, ソノ成分ニヨル表現ヲ $x = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ トスル。$e \geqq x$ カラ $a_i \geqq x_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n$ 之レハ x_i ヲ X_i ノ任意ノ元トシテモ成立. a_i ノ成分ニヨル表現ハ $a_i = 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 \cup a_i \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0$ §2 (B) (iii) ニヨリ $x \wedge a_i = 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 \cup x_i \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 = x_i$ 即チ, P ノ任意ノ元 x ニ對シ $x \wedge a_i$ ガ存在シ, x ノ X_i 成分ヲ表ス。從ッテ $P \wedge a_i \subset X_i$. 逆ニ $x \in X_i$ トスレバ $x \leqq a_i$ 從ッテ $x = x \wedge a_i$

$$\therefore \quad P \wedge a_i \supset X_i \qquad \text{故ニ} \quad X_i = P \wedge a_i$$

(B) 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合 P ノ direct join ニヨル分解ヲ $P = (P \wedge a_1) \textcircled{\cup} (P \wedge a_2) \textcircled{\cup} \cdots\cdots \textcircled{\cup} (P \wedge a_n)$ トスル。$\{ i_1, \cdots\cdots, i_p \}$ ト $\{ j_1, \cdots\cdots, j_q \}$ トガ互ニ素ナラバ

$$(a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \cdots\cdots \cup a_{i_p}) \cap (a_{j_1} \cup a_{j_2} \cup \cdots\cdots \cup a_{j_q}) = 0$$

証明. $a_{i_1} \cup \cdots\cdots \cup a_{i_p}$ 及ビ $a_{j_1} \cup \cdots\cdots \cup a_{i_q}$ ヲ成分ニヨッテ書キ表ハシ，各成分毎ニ meet ヲトレバヨイ。

(C) (A)ト同ジ假定ノ下ニ，P ノ任意ノ部分半順序集合 Q ニ対シ，$(Q \cap a_1) \ovee \cdots\cdots \ovee (Q \cap a_n)$ ハ意味ヲモツ．特ニ $Q = \{x \mid 0 \leqq x \leqq q\}$ ナラバ $Q = (Q \cap a_1) \ovee \cdots\cdots \ovee (Q \cap a_n)$. 従ッテ $Q = P \cap b$ ナラバ $Q = (P \cap c_1) \ovee \cdots\cdots \ovee (P \cap c_n)$ $c_i = b \cap a_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n$

(D) (A)ト同ジ假定ノ下ニ

$$(P \cap a_1) \ovee \cdots\cdots \ovee (P \cap a_i) = P \cdot (a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_i)$$

証明. 左辺ノ存在ハ §2 (E) (i) ニヨリ明カ。右辺ノ存在ハPノ任意ノ元 x ノ成分ニヨル表現ヲ $x = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ トスルトキ，§2 (B) (ii) ニヨリ $x \cap (a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_i) = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_i$ ナルコトヨリ明カデアル。而シテ等式ノ成立スルコトハ容易ニ確メラレル。

(E) 0 及ビ e. ヲ有スル半順序集合 P ノ direct join ニヨル二通リノ分解ヲ

$$P = (P \cap a_1) \ovee \cdots\cdots \ovee (P \cap a_n)$$

$$P = (P \cap b_1) \ovee \cdots \ovee (P \cap b_m)$$

トスル. $a_i \cap b_j = c_{i,j}$ トスルト

$$P = \underset{i,j}{\ovee} (P \cap c_{i,j})$$

証明. §2 定理ノ証明 ((1), (2) → (5)) カラ明カ。

(F) P ヲ D_0 ヒトスル。

$$P = (P \cap a_1) ⓤ (P \cap a_2) ⓤ \cdots\cdots ⓤ (P \cap a_n)$$

ナルトキ $a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup a_n = b_i$.

$i = 1, \cdots\cdots, n$ トオクト

$$P = (P \cup b_1) ⓝ (P \cup b_2) ⓝ \cdots\cdots ⓝ (P \cup b_n)$$

且ツ, $P \cup b_1, \cdots\cdots, P \cup b_n$ ハ夫々 $P \cap a_1, \cdots\cdots, P \cap a_n$ ト同型デアル。

証明. P ノ任意ノ元ヲ x トシ

$$x = x_1 \cup x_2 \cup \cdots\cdots \cup x_n \qquad x_i \in P \cap a_i$$

トスル。b_1 ヲ成分デ表ハセバ

$$b_1 = 0 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$\therefore \quad x \cup b_1 = x_1 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n = x_1 \cup b_1$$

$$= (x \cap a_1) \cup b_1$$

同様ニシテ $x \cup b_i = (x \cap a_i) \cup b_i \qquad i = 1, \cdots\cdots, n$

之レハ P ノ任意ノ元 x ニ対シテ成立ツ。依テ

$$P \cup b_i \subset (P \cap a_i) \cup b_i$$

然ルニ $P \cup b_i \supset (P \cap a_i) \cup b_i$

故ニ $P \cup b_i = (P \cap a_i) \cup b_i$

$P \cup b_i$ ノ任意ノ元ヲ $x^i \cup b_i$ トスル. $i = 1, \cdots\cdots, n$

各 $x^i \cup b_i = (x^i \cap a_i) \cup b_i$ ヲ成分デ表スト

$$x^1 \cup b_1 = (x^1 \cap a_1) \cup a_2 \cup a_3 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$x^2 \cup b_2 = a_1 \cup (x^2 \cap a_2) \cup a_3 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$x^n \cup b_n = a_1 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup (x^n \cap a_n)$$

$$\therefore \quad (x^1 \cup b_1) \cap (x^2 \cup b_2) \cap \cdots\cdots \cap (x^n \cup b_n)$$

$$= (x^1 \cap a_1) \cup (x^2 \cap a_2) \cup \cdots\cdots \cup (x^n \cap a_n)$$

即チ $P \cup b_i$ ノ任意ノ元 $x^i \cup b_i$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ對シ $\bigcap_{i=1}^{n} (x^i \cup b_i)$ ガ存在シ $\bigcup_{i=1}^{n} (x^i \cap a_i)$ ニ等シイ。P ノ任意ノ元ヲ x トスルト

$$x = (x \cap a_1) \cup \cdots\cdots \cup (x \cap a_n)$$

$$= (x \cup b_1) \cap (x \cup b_2) \cap \cdots\cdots \cap (x \cup b_n)$$

故ニ　$P = (P \cup b_1) \cap (P \cup b_2) \cap \cdots\cdots \cap (P \cup b_n)$

今 $\bigcap_{i=1}^{n} (x^i \cup b_i) \geqq \bigcap_{i=1}^{n} (y^i \cup b_i)$ トスルト

$$\bigcup_{i=1}^{n} (x^i \cap a_i) \geqq \bigcup_{i=1}^{n} (y^i \cap a_i)$$

$$\therefore \quad x^i \cap a_i \geqq y^i \cap a_i$$

從ッテ　$(x^i \cap a_i) \cup b_i \geqq (y^i \cap a_i) \cup b_i$

$$\therefore \quad x^i \cup b_i \geqq y^i \cup b_i$$

故ニ　$P = (P \cup b_1) \cap (P \cup b_2) \cap \cdots\cdots \cap (P \cup b_n)$

最後ニ $P \cap a_i$ ノ元 $x \cap a_i$ ニ $P \cup b_i$ ノ元 $x \cup b_i$ ヲ對應サセルコトニヨリ $P \cup b_i$ ガ $P \cap a_i$ ニ同型ナモノトガ分ル。

(G)　以上主トシテ direct join ニツイテ述べタガ

コレラノ dual ハ direct meet ニツイテスベテ成立スル。

(H) $P \ni 0, e$ トスル。

$$P = (P \wedge a) \textcircled{u} (P \wedge b) \rightleftarrows P = (P \vee a) \textcircled{$\cap$} (P \vee b)$$

(K) 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合ノ素因子ヘノ分解ニ於ケル因子ノ個数ハ direct join ノ場合モ direct meet ノ場合モ一致スル。

§4. コノ§ニ於テハ P ヲ 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合トスル，

(A) P ノ direct join ニヨル分解ニ於テーツノ因子ノ最大ノ元トナリ得ル元ノスベテノ集合ヲ C_1 トスルト

(i) $a \in C_1$ ナルタメニハ $P = (P \wedge a) \textcircled{u} (P \wedge b)$ ナル $b \in C_1$ が存在スルコトが必要ニシテ且ツ充分デアル。（§2 (E) (ii); §3 (D)）

(ii) $a, b \in C_1$ ナラバ $a \wedge b \in C_1$ （§3 (E)）

(iii) P が素因子ノミカラナル direct join ニ分解サレルナラバ，P ノ有限部分集合 $A = \{0, a_1, \cdots\cdots, a_n\}$ が存在シ，C_1 ハ A ノ部分集合ノ join 全体ト一致スル。（§2. 定理 (E); §3 (D)）

(B) P ノ direct meet ニヨル分解ニ於テーツノ因子ノ最小ノ元トナリ得ル元ノ集合ヲ C_2 トスルト

(i) $a \in C_2$ ナルタメニハ $P=(P\cup a)\,\textcircled{\cap}\,(P\cup b)$ ナル $b \in C_2$ ガ存在スルコトガ必要ニシテ且ツ充分デアル。

(ii) $a, b \in C_2$ ナラバ $a \cup b \in C_2$

(iii) P ガ素因子ノミカラナル direct meet ニ分解サレルナラバ, P ノ有限部分集合 $B=\{e, b_1, \ldots\ldots, b_n\}$ ガ存在シ, C_2 ハ B ノ部分集合ノ meet 全体ト一致スル。

(C) $C_1 = C_2$ （§3 (H)）

コノ一致スル集合ヲ P ノ Center ト呼ブ. Center C ハ lattice ヲ作ル. ($a, b \in C$ ナラバ P ニ於テ $a \cup b$, $a \cap b$ ガ存在シ C ニ属スル)

(D) P ノ Center C ハ P ノ自己同型置換ニヨッテモ, 逆ノ自己同型置換ニヨッテモ不変デアル。

証明. 逆ノ自己同型置換 f ニツイテ証明スル。$a \in C$ トスルト $P=(P\cap a)\,\textcircled{\cup}\,(P\cap b)$ ナル b ガ存在スル。

容易ニ分ル様ニ $P=(P\cup f(a))\,\textcircled{\cap}\,(P\cup f(b))$

$$\therefore \quad f(a) \in C$$

(E) P ノ Center C ノ各元ハ一ツ而シテ唯一ツノ補元ヲモチ, ソノ補元ハヤハリ C ニ属スル。

証明. $a \in C$ トスルト $P=(P\cap a)\,\textcircled{\cup}\,(P\cap b)$ ナル b ガ存在シ $a \cup b = e$, $a \cap b = 0$ 即チ, a ハ補元 b ヲモツ. a ノ任意ノ補元ヲ x, ソノ成分ヲ x_1, x_2 トスレ

バ　$x = x_1 \cup x_2$,　$a = a \cup 0$ ヨリ

$$a \cup x = a \cup x_2 = a \cup b \qquad \therefore \quad x_2 = b$$

又　$a \cap x = x_1 \cup 0 = 0 \cup 0 \qquad \therefore \quad x_1 = 0$

$\therefore \quad x = x_1 \cup x_2 = b$

——（以　上）——